Hoja 10. Estructura de los endomorfismos: Diagonalización.

1. Hallar los autovalores reales y los autovectores de $\mathbb{R}^n$ de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Además, en los casos en los que sea posible, hallar una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores, y la matriz en esa base de la aplicación lineal dada.

2. Encontrar los autovalores y los autovectores de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ dadas por las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Hallar los posibles autovalores de un endomorfismo f de un espacio vectorial V tal que $f \circ f = id_V$

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo que admite por vectores propios a $(0, 1, -2)$, $(1, 0, 4)$ y $(1, 0, -2)$. Sabiendo que $f(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$ hallar los autovalores de f.

5. Calcular los autovalores y autovectores de la matriz $\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$. Decidir si es diagonalizable.

6. Probar que si λ y μ son valores propios de f distintos y v y w son vectores propios asociados a ellos respectivamente, entonces $v + w$ **no** es vector propio de f.

7. Hallar los valores y subespacios propios de $f \in \mathrm{End}(\mathcal{P}_3^{\mathbb{R}}[x])$, donde $f(p(x)) := p'(x)$.

8. Diagonalizar las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Diagonalizar si es posible las siguientes matrices A y C calculando matrices de paso.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Hallar una matriz diagonal, si es posible, de los siguientes endomorfismos.

a) $f \in \text{End}(\mathbb{K}^4)$ con $\dim(\text{Nuc } f) = 2$ y autovalores 1 y -1.

b) $f \in \text{End}(\mathbb{K}^4)$ con $\dim(\text{Nuc}(f - 3Id)) = 3$ y autovalor 2.

c) $f \in \text{End}(\mathbb{K}^4)$ con dos autovalores λ_1 y λ_2 distintos con multiplicidad geométrica $d_1 = d_2 = 2$.

11. Dada $A = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calcular A^{1438} y $\lim_{n \longrightarrow \infty} A^n$.

12. Sea $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ una base del $\mathbb{K}$-espacio vectorial E y $f \in \text{End}(E)$ tal que $f(\mathbf{e}_1) = ... = f(\mathbf{e}_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i$, donde $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Demostrar que f es diagonalizable si y sólo si $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$.

13. Sea A una matriz cuadrada de orden n y nilpotente de orden p, es decir $A^p = \mathbf{0}$ y $A^{p-1} \neq \mathbf{0}$ con $p \in \mathbb{N}$. Probar que el único autovalor de A es el 0.

14. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ b & d & 1 & 0 \\ c & e & f & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinar los valores propios de A.

b) Discutir las condiciones que deben cumplir a, b, c, d, e, f para que A sea diagonalizable.

c) En las condiciones para las que A es diagonalizable, obtener los subespacios propios asociados a los dos valores propios existentes.

d) Calcular la matriz de paso (que expresa la nueva base en términos de la canónica) a la forma diagonal.

15. Demostrar o dar un contraejemplo para decidir la veracidad de las siguientes afirmaciones.

a) Toda matriz invertible es diagonalizable.

b) Si A es diagonalizable, entonces A^n es diagonalizable para $n \in \mathbb{N}$.

c) Si A y B son diagonalizables, entonces $A + B$ y AB son diagonalizables.

16. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido en la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ por
$f(\mathbf{e}_1) = (\alpha + 1)\mathbf{e}_1 - \alpha\mathbf{e}_2 + \alpha\mathbf{e}_3$; $f(\mathbf{e}_2) = (\alpha + \beta)\mathbf{e}_1 - \alpha\mathbf{e}_2 + (\alpha - 1)\mathbf{e}_3$; $f(\mathbf{e}_3) = \beta\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Determinar los valores propios de f comprobando que no dependen ni de α ni de β.

b) Calcular el valor de α para el que el endomorfismo f sea diagonalizable. Obtener en estas condiciones una base formada por vectores propios.

17. Sea la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Probar que 1 es valor propio. Calcular sus multiplicidades algebraica y geométrica. Dar una base del subespacio propio asociado a este valor propio.

b) Estudiar si es diagonalizable y, en caso afirmativo, encontrar una matriz de paso a forma diagonal así como una base de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios.

18. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ la matriz $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

19. Estudiar para qué valores de c la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-c \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

20. Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ que verifica: *a*) $f(1,1,1) = (0,0,0)$ y *b*) 2 y 3 son valores propios de f. ¿Es f diagonalizable?

21. Encontrar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

22. Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ una aplicación lineal dada por

$$f(A) = A + A^t - \mathrm{tr}(A)I,$$

siendo I la matriz identidad, A^t la matriz transpuesta de A y $\mathrm{tr}(A)$ la traza de A (la suma de todos los elementos de la diagonal principal).

a) Encuentra la matriz de f respecto de las bases canónicas.

b) Encuentra bases del núcleo y de la imagen de f.

23. Consideramos el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donde } a \text{ y } b \text{ son parámetros reales.}$$

a) Halla los valores de a y b para los que f es diagonalizable.

b) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado *a*), encuentra una base diagonalizante para f, las matrices de cambio entre ella y la canónica, y escribe la fórmula que relaciona la matriz de f en la nueva base con la matriz de f en la base canónica a través de las matrices de cambio de base.

24. Consideramos el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donde } a \text{ es un parámetro real.}$$

a) Determina los valores de a para los que f es diagonalizable.

b) Para los valores de a obtenidos en el apartado *a*), encuentra una base diagonalizante para f, la matriz de cambio entre ella y la canónica y escribe la fórmula que relaciona la matriz de f en la nueva base con la matriz de f en la base canónica a través de la matriz de cambio.

25. En un bosque maderero, los árboles están clasificados en dos tamaños. Un censo que se hace cada 5 años reclasifica un 30 % de los árboles de tamaño menor, que pasan a ser de tamaño grande. Entre cada dos censos se corta un 10 % de los árboles de tamaño grande y se repuebla con el mismo número de árboles de tamaño pequeño. ¿Aumenta el número de árboles con el tiempo? Si inicialmente había 1000 árboles de tamaño pequeño y ninguno grande, ¿cuántos árboles de tamaño grande hay pasados 20 años? [Sugerencia: si x_n representa el número de árboles pequeños e y_n representa el número de árboles grandes después de n períodos de 5 años, se tiene $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ para una cierta matriz A que convendrá diagonalizar.]

26. Decidir de forma razonada si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

1. Sea A una matriz de tamaño n por n con coeficientes reales. Suponemos que A tiene n valores propios reales distintos y todos son positivos. Entonces existe una matriz real B tal que $B^2 = A$.

2. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial. Sean v_1, v_2 y v_3 tres vectores propios no triviales de f correspondientes a tres valores propios distintos. Entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ son linealmente independientes.

3. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita. Sean U_1, U_2 y U_3 tres subespacios de V. Si
$$V = U_1 + U_2 + U_3 \text{ y} \dim_K V = \dim_K U_1 + \dim_K U_2 + \dim_K U_3,$$
entonces la suma $U_1 + U_2 + U_3$ es directa.

4. Sean $f : V \to U$ y $g : U \to W$ dos aplicaciones lineales. Entonces
$$\mathrm{rg}(f \circ g) = \mathrm{mín}\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}.$$
($\mathrm{rg}(f)$ denota el rango de la aplicación f)

5. Sean $f : V \to U$ y $g : U \to W$ dos aplicaciones lineales. Entonces
$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f).$$

6. Sea A una matriz cuadrada real. Suponemos que $A^2 + A + 1 = 0$. Entonces A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.